Satellitenbewegung mit Reibung

Von *Leif. N. Persen* in Trondheim

Unter der Voraussetzung, daß die auf einen Satelliten wirkenden Reibungskräfte entweder dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional seien und mit dem Abstand r vom Massenmittelpunkt des Planeten abnahmen (Fall 1), oder der Geschwindigkeit proportional seien und mit dem Quadrat des Abstandes r abnehmen (Fall 2), wird gezeigt, daß die strengen Lösungen für die Bahnkurven des Satelliten sich durch bekannte Funktionen ausdrücken lassen. Ferner wird die Behauptung von Singer, die Bahnkurve ziehe sich zu einem Kreis zusammen, ehe der Satellit sich auf einer Spirale gegen den Planeten bewegt, näher erläutert. Schließlich wird die Lebensdauer von „Sputnik I" bestimmt, indem die Lebensdauer zu dem Zeitpunkt gerechnet wird, wenn der Satellit sich in die adiabatisch gelagerte Atmosphäre bewegt, wobei eine theoretisch berechnete Höhe dieser Atmosphäre von 28 km bis 50 km benutzt wird.

Two cases are considered: (1) the frictional force is proportional to the square of velocity and inversely proportional to the distance r from the mass centre of the planet, and (2) the frictional force is proportional to the velocity and inversely proportional to the square of the distance r. It is shown that in both cases rigorous solutions in terms of known functions are obtained for the path of the satellite. Singer's statement that the satellite path tends to become a circle before the satellite starts on its spiral course towards the planet is discussed in detail. Finally, the life-time of "sputnik I" is computed, the end of life-time being taken as the moment when the satellite enters the adiabatic atmosphere; the height of the latter is taken from theoretical calculations to be between 28 and 50 km.

En supposant que les forces de frottement opérant sur un satellite soient ou proportionales au carré de la vitesse en diminuant avec la distance r du centre de gravité de la planète (Cas No. 1) ou qu'elles soient proportionales à la vitesse en diminuant avec le carré de la distance r (Cas No. 2), on démontre que les solutions exactes pour les courbes d'orbite du satellite peuvent être exprimées par des fonctions connues. Ensuite on explique de plus près l'affirmation de Singer que la courbe d'orbite se contracte à un cercle avant que le satellite avance sur une spirale dans la direction de la planète. Enfin la durée de vie de « Sputnik I » est déterminée en calculant cette durée de vie au moment où le satellite est en mouvement dans la direction de l'atmosphère adiabatique, tout en utilisant une hauteur de cette atmosphère de 28 à 50 km, calculée théoriquement.

В предположении, что (случай 1) силы трения, действующие на спутник, пропорциональны квадрату скорости и обратно пропорциональмны расстоянию от центра тяжести планеты или (случай 2) пропорциональны скорости и обратно пропорциональны квадрату расстояния, показывается, что строгие решения для орбит спутника выражаются через известные функции. Далее дается более подробное обяснение утверждения Сингера, что орбита спутника стягивается в круг, прежде чем спутник начинает приближатьсян к планете по спирали. Наконец определяется продолжительность жизни первого советского искусственного спутника, считая продолжительность жизни от того момента времени, когда спутник проникает в адиабатически расположенную атмосферу. При этом употребляется теоретически вычисленная высота этой атмосферы от 28 до 50 км.

Im folgenden sollen zwei Beispiele von Satellitenbewegung mit Reibung durchgerechnet werden, die auf Grund einer sehr einfachen Lösung von scheinbar sehr schwierigen Gleichungen von Interesse sein dürften. Die Beispiele sind einer Vorlesungsreihe des Verfassers über angewandte Mechanik entnommen.

Bei der Bewegung eines Massenpunktes in einer Ebene hat man bekanntlich folgende Ausdrücke für die Beschleunigung in der r- bzw. φ-Richtung

$$a_r = \ddot{r} - r\,\omega^2 \quad \ldots \quad (1),$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\omega) \quad \ldots \quad (2).$$

Verlegt man nun den Koordinatenursprung in den Massenmittelpunkt der Erde, wird sich ein Satellit unter Einfluß einer Kraft P bewegen, die immer nach dem Koordinatenursprung gerichtet ist und nur von r in folgender Weise abhängt

$$P = m\,\frac{\lambda}{r^2} \quad \ldots \quad (3),$$

wo m die Masse des Satelliten bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann sofort hinschreiben

$$\ddot{r} - r\,\omega^2 = -\frac{\lambda}{r^2} - F \quad \ldots \quad (4),$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\omega) = -G \quad \ldots \quad (5),$$

wo F und G die Komponenten der Reibung pro Masseneinheit in der r- bzw. φ-Richtung bezeichnen. Bei Abwesenheit der Reibung gehen diese Gleichungen in die Bewegungsgleichungen der Planeten über, die Kegelschnitte als einzig mögliche Bahnkurven geben.

Für die bei der Satellitenbewegung wirklich auftretende Reibung lassen sich vorläufig keine physikalisch richtigen Ausdrücke angeben, sondern man ist auf mehr oder wenig wohlbegründete Annahmen angewiesen. Stellt man sich vor, daß die auftretende Reibung durch ein sehr dünnes Gas hervorgerufen wird, darf man wohl auch annehmen, daß die Reibung proportional irgendeiner Potenz der Geschwindigkeit sein muß. Ferner scheint es auch vernünftig anzunehmen, daß die Dichte dieses Gases mit wachsender Entfernung von der Erde abnehmen muß. Es soll nun zwei mit diesen Überlegungen übereinstimmende Annahmen für die Reibung gemacht werden, die zugleich eine strenge Lösung von (4) und (5) ermöglichen.

Fall 1

Es wird angenommen, daß die Reibung proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit ist und mit der ersten Potenz des Abstandes r vom Koordinatenursprung abnimmt. Dadurch ist auch einigermaßen Rücksicht darauf genommen, daß die Dichte sich mit r ändert und die Gleichungen (4) und (5) lassen sich folgendermaßen hinschreiben:

$$\ddot{r} - r\,\omega^2 = -\frac{\lambda}{r^2} - k\frac{\dot{r}^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\omega) = -\,k\frac{r^2\,\omega^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wo k als dimensionsloser Reibungsbeiwert aufzufassen ist. Für den Fall, daß die Bahnkurve des Satelliten angenähert kreisförmig ist, darf man F als klein gegen G ansehen, und ohne ausschlaggebenden Fehler dabei einzuführen darf man F vernachlässigen, wodurch das letzte Glied der Gleichung (6) gleich Null zu setzen ist.

Beachtet man nun, daß

$$\frac{d}{dt} = \omega\frac{d}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ist, läßt sich die Lösung der Gleichung (7) leicht hinschreiben:

$$r^2\,\omega = C_1\,e^{-k\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

wo C_1 eine Integrationskonstante ist. Nun wird die Zeit t als unabhängige Veränderliche der Gleichung (6) durch φ ersetzt, wozu man die Gleichungen (7) und (8) benutzt. In dieser Weise bekommt man

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2}{d\varphi^2} + \varepsilon\frac{d}{d\varphi} \qquad \text{wo} \qquad \varepsilon = -\frac{1}{r}\left\{k\,r\,\omega^2 + 2\,\omega^2\frac{dr}{d\varphi}\right\},$$

wonach Gleichung (6) mit Hilfe von Gl. (9) folgende Form annimmt

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - k\frac{dr}{d\varphi} - r + \frac{\lambda}{C_1^2}\,r^2\,e^{+2k\varphi} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (10).$$

Man hat also eine nicht-lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten, die sich aber durch Einführung von $\xi = \frac{1}{r}$ leicht in die folgende Form überführen läßt:

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} - k\frac{d\xi}{d\varphi} + \xi = \frac{\lambda}{C_1^2}\,e^{+2k\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Diese Gleichung hat die leicht angebbare Lösung

$$\underline{\xi = \frac{1}{r} = e^{\frac{k}{2}\varphi}\left\{C_2\sin\left(\varphi\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}\right) + C_3\cos\left(\varphi\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}\right)\right\} + \frac{\lambda\,e^{+2k\varphi}}{C_1^2\,(1+2\,k^2)}} \quad \ldots \quad (12),$$

wo C_2 und C_3 Integrationskonstanten sind. Damit ist r als Funktion von φ gefunden, und Gleichung (12) gibt also die Gleichung der Bahnkurve an. Mit den Anfangsbedingungen

$$r = r_0\,, \qquad \dot{r} = 0\,, \qquad \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{r_0}\,,$$

wo

$$v_0^2 = \frac{16}{25}\frac{2\,g\,R^2}{r_0}\,, \qquad \lambda = g\,R^2 \quad (R = \text{Radius der Erde}), \quad k = 0{,}02$$

sind, erhält man die in Bild 1 aufgetragene Bahnkurve, die eine Art elliptische Spirale ist. Der Reibungsbeiwert k ist hier unrealistisch groß gewählt, damit die charakteristischen Züge der Kurve deutlich zum Ausdruck kommen sollen.

Fall 2

Die Annahmen über die Reibung im ersten Fall sind nicht ganz zufriedenstellend, da F vernachlässigt worden ist, und außerdem auch die Dichteänderung zu wenig berücksichtigt worden ist. Stellt man sich die Bewegung des Satelliten als eine Bewegung eines Körpers in einem sehr dünnen Gas vor, läßt sich eine Reynoldsche Zahl bilden

$$Re = \frac{v \varrho d}{\mu},$$

die trotz einer sehr hohen Geschwindigkeit v auf Grund der fast verschwindenden Dichte ϱ als klein angesehen werden darf. Damit darf man ferner annehmen, daß die Reibung proportional der

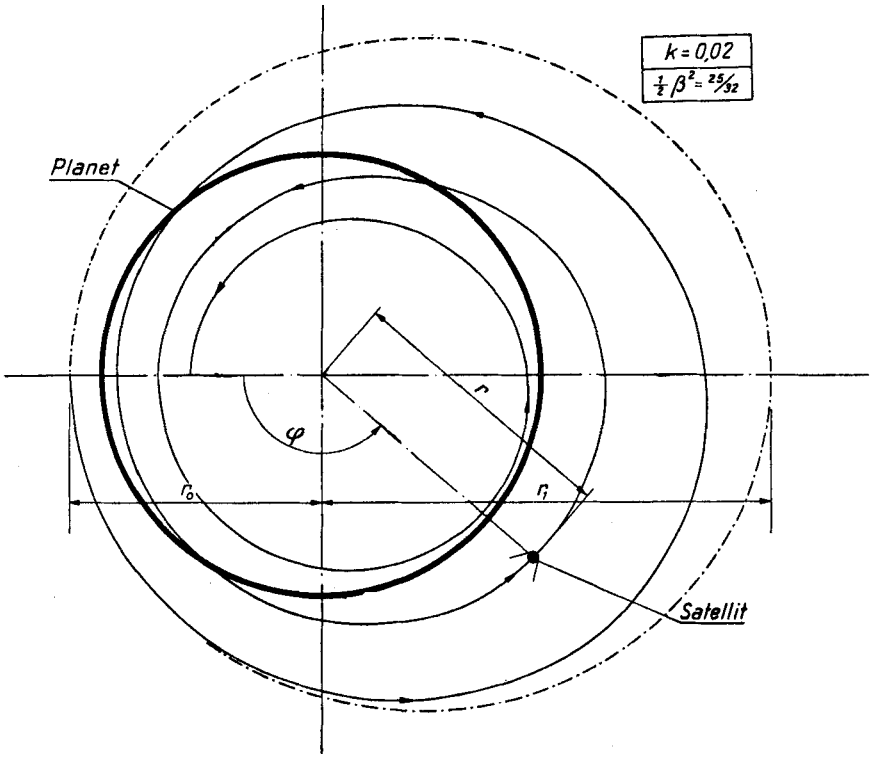

Bild 1

ersten Potenz der Geschwindigkeit ist. Wird die Dichteänderung dadurch berücksichtigt, daß man die Reibung mit der zweiten Potenz von dem Abstand r abnehmen läßt, so lassen sich die Bewegungsgleichungen (4) und (5) sofort in folgender Form hinschreiben:

$$\ddot{r} - r\,\omega^2 = -\frac{\lambda}{r^2} - c\,\frac{\dot{r}}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\omega) = -c\,\frac{r\,\omega}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

wo c ein dimensionsbehafteter Reibungsbeiwert ist. Diese beiden Gleichungen lassen sich in genau derselben Weise lösen wie die Gleichungen im ersten Fall. Mit Hilfe von (8) erhält man aus Gleichung (14)

$$r^2\,\omega = C_1 - k\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Beachtet man ferner, daß in diesem Falle

$$\varepsilon = -\frac{1}{r^2}\left\{c\,\omega + 2\,r\,\omega^2\frac{dr}{d\varphi}\right\}$$

ist, läßt sich die Gleichung (13) in die folgende Form überführen

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r + \frac{\lambda\,r^2}{(C_1 - c\,\varphi)^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

die ferner durch Einführung von $\xi = \frac{1}{r}$ in die folgende Gleichung übergeht

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = \frac{\lambda}{(C_1 - c\,\varphi)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Schreibt man zur Abkürzung $\eta = \dfrac{C_1}{c - \varphi}$, hat diese Gleichung die leicht anzugebende Lösung

$$\xi = C_2 \sin \eta + C_3 \cos \eta - \frac{\lambda}{c^2} [\cos \eta \operatorname{Ci}(\eta) + \sin \eta \operatorname{si}(\eta)] \quad \ldots\ldots \quad (18),$$

wo Ci den Integral-Kosinus und si den Integral-Sinus bezeichnen. Mit denselben Anfangsbedingungen wie im ersten Falle lassen sich die Integrationskonstanten C_1, C_2 und C_3 bestimmen, und wird außerdem c durch den dimensionslosen Reibungsbeiwert $\varkappa$ ersetzt, wo

$$c = \frac{1}{\varkappa} v_0 r_0$$

und zur Abkürzung $\beta^2 = \dfrac{2 g R^2}{v_0^2 r_0}$ geschrieben, erhält man die Lösung

$$\frac{r_0}{r} = \cos \varphi - \frac{1}{2} \varkappa \beta^2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \varkappa^2 \beta^2 \{[\operatorname{Ci}(\varkappa) - \operatorname{Ci}(\varkappa - \varphi)] \cos(\varkappa - \varphi) + \\ + [\operatorname{si}(\varkappa) - \operatorname{si}(\varkappa - \varphi)] \sin(\varkappa - \varphi)\} \quad \ldots \quad (19),$$

die die Gleichung der Bahnkurve angibt. Auch in diesem Falle erhält man elliptische Spiralen, die für verschiedene Werte von β und $\varkappa$ in Bild 2 und 3 aufgetragen sind. Es ist bemerkenswert,

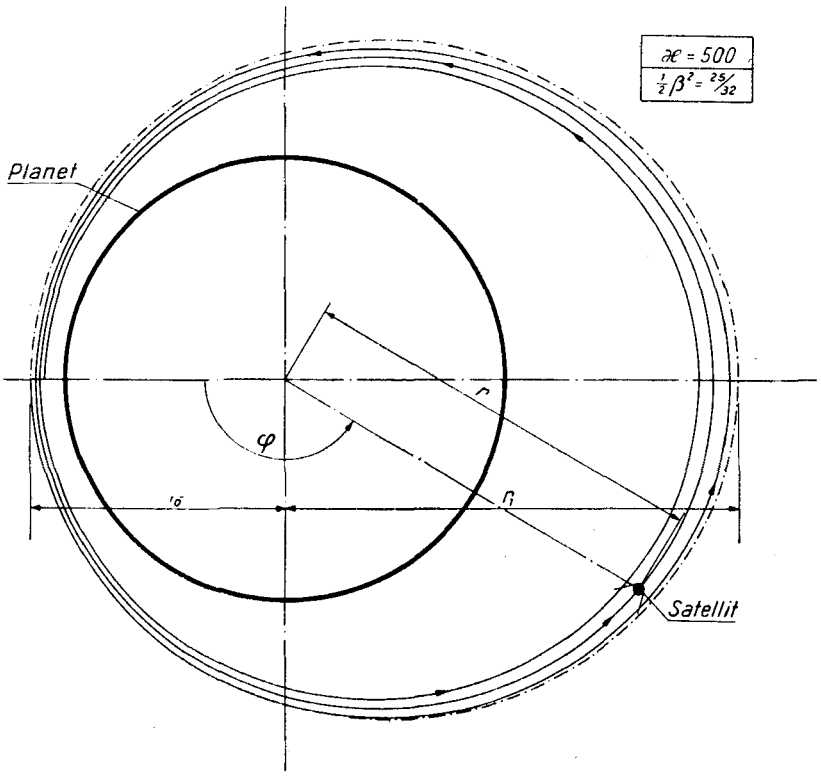

Bild 2

daß, wenn man mit denselben Anfangswerten der Reibungskräfte in der φ-Richtung rechnet, die Spiralen in den beiden Fällen nach drei Umläufen in dem in Bild 2 benutzten Maßstab nicht voneinander zu unterscheiden sind. Ferner erlaubt die Lösung im zweiten Falle eine besonders einfache Aussage über die Lebensdauer des Satelliten. Wenn der Reibungsbeiwert $\varkappa$ bekannt ist, gibt die Zahl $\varkappa/2\pi$ die Anzahl von Umläufen an, bis der Satellit sich im Koordinatenursprung befindet.

Singer hat in einer seiner Arbeiten [2] behauptet, die Bahnkurve ziehe sich wegen der Reibung im Perigäum zu einem Kreis zusammen, ehe der Satellit auf einer Spirale gegen die Erde geht. Diese Behauptung läßt sich mittels der Lösung des zweiten Falles näher untersuchen. Mit den Bezeichnungen h_a und h_p für die Höhe über der mittleren Erdoberfläche im Apogäum bzw.

Perigäum und Δh_a bzw. Δh_p für die Höhenverluste pro Umlauf in den beiden Punkten, läßt sich aus der später abgeleiteten Gleichung (22) folgender Ausdruck ermitteln:

$$\frac{\Delta h_p}{h_p} = \frac{r_0\left(1 - \dfrac{R}{r_1}\right)}{r_1\left(1 - \dfrac{R}{r_0}\right)} \frac{\Delta h_a}{h_a},$$

wo R den mittleren Erdradius bedeutet und r_0 und r_1 sich auf die elliptische Bahnkurve ohne Reibung beziehen und der Abstand vom Koordinatenursprung bis zum Perigäum bzw. Apogäum bezeichnen. Das Verhältnis zwischen den prozentualen Höhenverlusten im Perigäum und Apogäum hängt dementsprechend von den beiden Verhältnissen R/r_0 und R/r_1 ab.

Es wäre nun interessant, wenn man durch diese Rechnungen zu einer einigermaßen sinnvollen Aussage über die „Lebensdauer" des russischen Satelliten „Sputnik I" gelangen könnte. Zu diesem Zweck werden die Angaben über diesen Satelliten herangezogen, die in „Nature" vom 2. November 1957 zu finden sind [1].

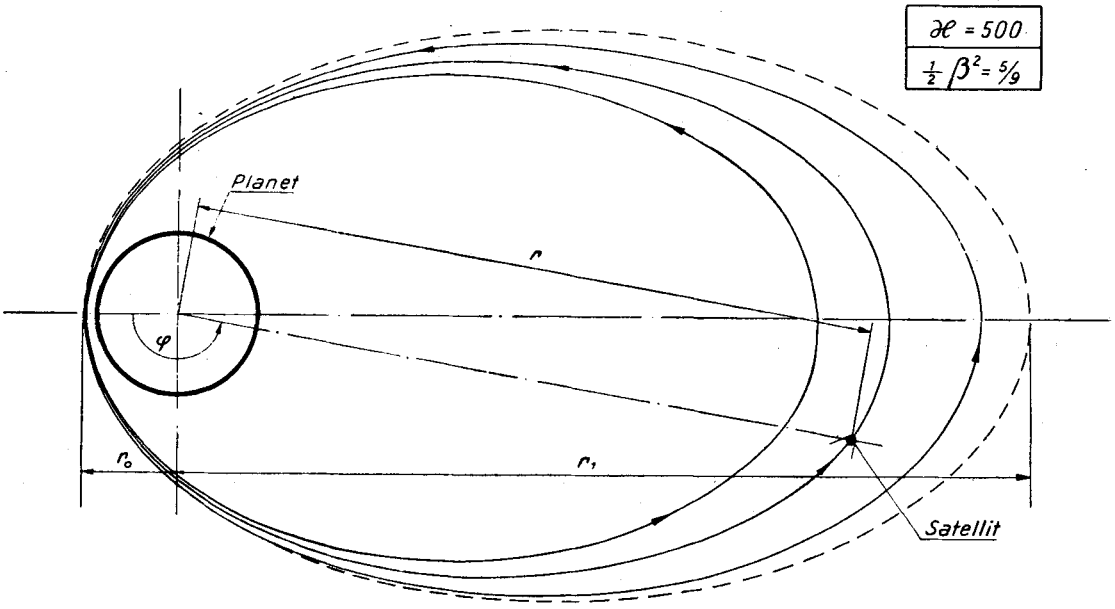

Bild 3

Von der Gleichung (15) ausgehend erhält man die Umlaufzeit in folgender Form

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\, d\varphi}{C_1 - c\,\varphi},$$

wo $r = r(\varphi)$ aus Gl. (19) einzusetzen ist. Wenn c durch c_1 ersetzt wird (wo $c = c_1\, v_0\, r_0$), läßt sich τ als eine Funktion von c_1 auffassen, und da c_1 sehr klein ist, benutzt man die folgende Reihenentwicklung für τ:

$$\tau = \tau_0 + \left.\frac{\partial \tau}{\partial c_1}\right|_0 \frac{c_1}{1!} + \cdots,$$

wo τ_0 die Umlaufzeit bei Abwesenheit der Reibung ist. Dadurch erhält man

$$\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = \frac{c_1}{\tau_0} \left.\frac{\partial \tau}{\partial c_1}\right|_0 = \frac{\Delta \tau}{\tau_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Dieses Verhältnis ist gemessen worden, und nach den oben angegebenen Aufgaben ist $\Delta\tau/\tau_0 = 0{,}14666/5760$. Mit Hilfe derselben Angaben läßt sich ferner β bestimmen, und zwar erhält man $\beta^2 = 1{,}89888$. Aus Gl. (20) erhält man schließlich $\partial\tau/\partial c_1|_0$ und mit dem angegebenen Wert von β ergibt sich

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial c_1}\right|_0 = 14{,}079, \quad \text{wodurch} \quad \varkappa = \frac{1}{c_1} = 552\,900$$

aus Gl. (21) bestimmt wird. Die für die Auftragung von den Spiralen in den Abbildungen gewählten Werte von $\varkappa$ sind also im Verhältnis zu diesem Wert sehr klein. Dieser Wert von $\varkappa$ gibt

nun 8800 Umläufe, bis der Satellit sich im Schwerpunkt der Erde befindet, aber für die „Lebensdauer" von „Sputnik I" ist dies weniger von Interesse. Da $\varkappa$ in diesem Falle sehr groß ist, darf man für die Ci- und si-Funktionen die asymptotischen Reihen einführen, wodurch Gl. (19) in die folgende Form übergeht:

$$\frac{r_0}{r} = \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right)\cos\varphi - \frac{\beta^2}{\varkappa}\sin\varphi + \frac{1}{2}\beta^2\frac{\varkappa^2}{(\varkappa-\varphi)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Für $\varphi = 2\,n\,\pi$ (mit n eine ganze Zahl) erhält man:

$$\frac{r_0}{r} = -\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right) + \frac{1}{2}\beta^2\left(1 - \frac{2\,n\,\pi}{\varkappa}\right)^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Diese Gleichung erlaubt nun eine Bestimmung von r nach n Umläufen, oder umgekehrt eine angenäherte Bestimmung von n, wenn r gegeben ist. Wenn der Satellit in die Atmosphäre hineinfliegt, verlieren die hier angegebenen Berechnungen ihre Gültigkeit, aber dann nähert sich auch der Zeitpunkt, in dem ein Satellit ohne irgendeine Bremsanordnung aufbrennen wird. Rechnet man mit einer Atmosphärenhöhe von 50 km, gibt Gl. (23) $n \cong 1040$ und eine Lebensdauer $T_{50} = 70$ Tage.

Mit einer Atmosphärenhöhe von 28 km wird $n \cong 1200$ und die „Lebensdauer" $T_{28} = 80$ Tage. Wenn diese Rechnungen einigermaßen mit der Wirklichkeit übereinstimmen sollten, dürfte man also damit rechnen, daß „Sputnik I" im Verlaufe der Zeit vom 29. Dezember 1957 bis 8. Januar 1958 in die Atmosphäre eintreten und schließlich aufbrennen wird.

Schließlich soll eine mathematische Ergänzung zum zweiten Falle gegeben werden. Wird z. B. vorausgesetzt, daß die Funktionen F und G durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$F = k\frac{\dot{r}}{r^2}f(r^2\,\omega), \qquad G = k\frac{r\,\omega}{r^2}f(r^2\,\omega) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

ist damit der Ansatz für den Reibungseinfluß durch die beliebige Funktion f verallgemeinert. Auch in diesem Falle zeigt sich, daß sich eine strenge Lösung des Problems angeben läßt. Aus der Bewegungsgleichung in der φ-Richtung erhält man nämlich

$$C - k\,\varphi = \int_0^{r^2\omega}\frac{d\zeta}{f(\zeta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

und die Bewegungsgleichung in der r-Richtung läßt sich durch denselben Rechnungsvorgang wie früher auf die folgende Form bringen:

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = \frac{\lambda}{r^4\,\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Mit gegebenem f gibt die Gl. (25) $r^2\,\omega = g(\varphi)$, wodurch das Glied auf der rechten Seite der Gl. (26) eine bekannte Funktion von φ wird. Die Lösung von Gl. (3) ist dann durch bekannte Methoden leicht angebbar. Auf die Frage, ob sich physikalisch sinnvolle Ansätze für $f(\zeta)$ angeben lassen, soll hier nicht eingegangen werden, da in diesem Zusammenhang nur die Möglichkeit, allgemeinere Lösungen zu finden, von Interesse ist.

Literatur

[1] „Nature" 2. November 1957, „Radio Observations of the Russian Satellite", p. 879—883.
[2] S. F. Singer, (Univ. Maryland, Col. Park) „Applications and Design Characteristics of Minimum Satellites", Am. Rocket Soc. 278/55.

Eingegangen am 20. Dezember 1957.

Beitrag zur Aerodynamik eines schwingenden Gitters I

Von *H. Söhngen* und *E. Meister* in Darmstadt

(Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Mülheim)

Herrn Professor Dr. A. Walther zum 60. Geburtstag gewidmet

In dem vorliegenden Bericht soll das Störgeschwindigkeitsfeld an einem senkrechten Streckengitter bestimmt werden, dessen Profile kleine harmonische Schwingungen um ihre Ruhelage ausführen. Dabei wird Inkompressibilität und Reibungsfreiheit des strömenden Mediums vorausgesetzt. Das Gitter sei durch Abwicklung eines Schaufelkranzes entstanden, der mit der Geschwindigkeit U_0 parallel zu den Profilen angeströmt werde. Die N Schaufeln dürfen unabhängig voneinander schwingen, d. h. sie brauchen weder mit gleicher Amplitude noch Phase sich zu bewegen. Es soll hier nur eine rein mathematische Ableitung gegeben werden, ohne auf die numerische Berechnung einzugehen. Diese Aufgabe und die Ermittlung der Luftkräfte und Momente an den Schaufeln bleibe einer späteren Arbeit vorbehalten.